

Master 2 Affaires publiques - Administration du politique

Droit électoral - Stéphane Cottin

Année universitaire 2016-2017

Les mathématiques du vote

Vincent BERTHET

Plan

1. Le scrutin proportionnel

1.1 Principe

1.2 Méthode de répartition au plus fort reste

1.3 Méthode de répartition à la plus forte moyenne

2. Le scrutin majoritaire

2.1 Le scrutin majoritaire à un ou deux tours

2.2 Le vote alternatif

2.3 La méthode Borda

2.4 La méthode de Condorcet

2.5 Un exemple

2.6 Le mode de scrutin parfait n'existe pas

2.7 Une alternative : le jugement majoritaire

Rappels

Trois modes de scrutin généraux :

- Scrutin majoritaire
 - Winner-Take-All
 - élection présidentielle (art. 7 de la Constitution)
 - élections législatives (art. L123 du code électoral)
 - élections départementales (art. L210-1 du code électoral)
- Scrutin proportionnel
 - sièges attribués selon le nombre de voix
- Scrutin mixte
 - combine scrutins majoritaire et proportionnel
 - élections régionales (art. L336 du code électoral)
 - élections municipales (> 1 000 hab) (art. L260 du code électoral)

1. Le scrutin proportionnel

1.1 Principe

- Plusieurs sièges à pourvoir : scrutin de liste proportionnel.
- Origine : en 1792 aux États-Unis : répartition des sièges entre les quinze états proportionnellement à leurs populations.

Le Congrès vote l'adoption de la *méthode de représentation proportionnelle fondée sur les quotas*, conçue par Alexander **Hamilton**.

En avril 1792, le Président G. Washington exerce son droit de veto pour rejeter la méthode de Hamilton et lui substituer la méthode préconisée par Thomas **Jefferson**. Adoptée par le Congrès, elle restera en vigueur jusqu'en 1842.

1. Le scrutin proportionnel

Deux étapes : la répartition des sièges au quotient, puis la répartition des restes.

La répartition au quotient

- Une fois attribués les sièges de la prime majoritaire, les sièges restants sont répartis à la proportionnelle en calculant le **quota** de chaque liste. On définit le **quotient électoral (QE)** :

$$QE = \frac{\text{nombre de suffrages exprimés}}{\text{nombre de sièges à répartir}}$$

$$\text{Quota liste} = \frac{\text{nombre de voix de la liste}}{QE} \quad (\text{arrondi à l'entier inférieur})$$

1. Le scrutin proportionnel

La répartition des restes

- A l'issue de la répartition au quotient il subsiste souvent des **restes** dont la répartition peut se faire selon deux méthodes générales : le plus fort reste ou la plus forte moyenne.

1. Le scrutin proportionnel

1.2 Méthode de répartition au plus fort reste

La méthode de Hare (ou Hamilton)

- On calcule le **reste** de la division (nombre de voix de la liste/QE) et le plus grand reste fait gagner un siège à la liste.
- Exemple : élection des eurodéputés italiens et allemands.
- Méthode abandonnée à cause du **paradoxe de l'Alabama**.

En 1881, le chef de service au Bureau du recensement constate *que l'Alabama se voit attribuer 8 sièges si le nombre total est de 299, mais seulement 7 si ce nombre total passe à 300...* (alors que le Texas et l'Illinois voient tous deux augmenter leurs nombres de sièges d'une unité chacun).

1. Le scrutin proportionnel

La répartition au plus fort reste peut utiliser des variantes du QE

Le quotient de Hagenbach-Bischoff

$$QE = \frac{\text{nombre de suffrages exprimés}}{\text{nombre de sièges à répartir} + 1}$$

- Cette modification a pour effet de rendre moins probable la présence de restes après la répartition au quotient.
- Exemple : élection des eurodéputés belges.
- Méthode de Droop : on ajoute une unité au quotient de Hagenbach-Bischoff (optimisation).

1. Le scrutin proportionnel

La quotient de Imperiali

$$QE = \frac{\text{nombre de suffrages exprimés}}{\text{nombre de sièges à répartir} + 2}$$

- Même logique mais dans ce cas la répartition au quotient peut produire un trop grand nombre de sièges.
- Exemple : élection des eurodéputés équatoriens.

1. Le scrutin proportionnel

1.3 Méthode de répartition à la plus forte moyenne

- Utilisée en France (article L262 du code électoral, élection municipale dans les communes de plus de 1000 habitants)

La méthode de Jefferson

- On répartit les sièges vacants après la répartition au quotient en divisant le nombre de voix de chaque liste par le nombre de sièges qu'elle a obtenus lors de cette répartition auquel on ajoute un siège fictif.

Plus forte moyenne de voix par siège.

Permet d'éviter le paradoxe de l'Alabama.

1. Le scrutin proportionnel

Exemple : élection municipale de Hautefort le 23 mars 2014.
Commune de la Dordogne de 1078 habitants (en 2012).

- Données :

Nombre de suffrages exprimés : 550

Sièges à pourvoir : 15

Suffrages liste « Tous unis pour l'Avenir » : 362

Suffrages liste « Hautefort Espoir et Renaissance » : 188

- Attribution de la prime majoritaire :
la liste « Avenir » remporte 8 sièges.

- Restent 7 sièges à pourvoir.

1. Le scrutin proportionnel

- Répartition au quotient :
 - liste « Avenir » : $362/(550/7) = 4.61$ (4 sièges)
 - liste « Renaissance » : $188/(550/7) = 2.39$ (2 sièges)

On a : $8 + 4 + 2 = 14$ sièges attribués, reste 1 siège à pouvoir.

- Répartition à la plus forte moyenne :
 - liste « Avenir » : $362/(4+1) = 72.4$
 - liste « Renaissance » : $188/(2+1) = 62.67$

- Au final :
 - liste « Avenir » : $8 + 4 + 1 = 13$ sièges
 - liste « Renaissance » : 2 sièges

1. Le scrutin proportionnel

- Cette élection municipale a donné lieu à un contentieux

La liste « Renaissance » a saisi le TA de Bordeaux à la suite d'une observation portée au PV des opérations électorales.

Le TA a annulé l'élection du candidat qui figurait en treizième position sur la liste « Avenir » et proclamé élu le troisième candidat sur la liste « Renaissance ».

Calcul erroné du TA : liste « Avenir » : $362/(12+1) = 27.85$

Le CE a annulé le jugement du TA de Bordeaux et confirmé le résultat initial de l'élection.

Arrêt rendu par le CE le 30 janvier 2015 (n°382627, Élections municipales de Hautefort (Dordogne)).

1. Le scrutin proportionnel

La méthode d'Hondt

- On divise le nombre de voix de chaque liste par des diviseurs successifs 1, 2, 3, 4 ... (autant de diviseurs que de sièges à pourvoir). Les sièges sont attribués aux listes qui obtiennent les plus fortes moyennes.

2. Le scrutin majoritaire

2.1 Le scrutin majoritaire à un ou deux tours

- Classique mais imparfait.

Exemple : préférences de 27 votants entre 4 candidats
(Barthélemy *et al.* 1989)

Nbre électeurs		5	4	2	6	8	2
Ordres de préférence	1^{er}	X	X	T	T	Z	T
	2^e	Y	Z	Y	Y	Y	Z
	3^e	Z	Y	X	Z	X	Y
	4^e	T	T	Z	X	T	X

2. Le scrutin majoritaire

- Scrutin majoritaire à un tour :

T est élu (10 voix) devant X (9 voix) et Z (8 voix)

Nbre électeurs		5	4	2	6	8	2
Ordres de préférence	1^{er}	X	X	T	T	Z	T
	2^e	Y	Z	Y	Y	Y	Z
	3^e	Z	Y	X	Z	X	Y
	4^e	T	T	Z	X	T	X

2. Le scrutin majoritaire

- Scrutin majoritaire à deux tours :

1^{er} tour : T (10 voix) et X (9 voix) qualifiés

2nd tour : **X est élu** (17 voix contre 10)

Nbre électeurs		5	4	2	6	8	2
Ordres de préférence	1^{er}	X	X	T	T	Z	T
	2^e	Y	Z	Y	Y	Y	Z
	3^e	Z	Y	X	Z	X	Y
	4^e	T	T	Z	X	T	X

2. Le scrutin majoritaire

- Scrutin majoritaire à deux tours :

X est élu mais 18 électeurs (majorité) préfèrent Y à X ...

Nbre électeurs		5	4	2	6	8	2
Ordres de préférence	1 ^{er}	X	X	T	T	Z	T
	2 ^e	Y	Z	Y	Y	Y	Z
	3 ^e	Z	Y	X	Z	X	Y
	4 ^e	T	T	Z	X	T	X

2. Le scrutin majoritaire

2.2 Le vote alternatif

- Système par éliminations successives.

Chaque électeur **classe les candidats** par ordre de préférence.

On compte les voix des candidats classés premiers. Si un candidat obtient la majorité absolue des voix, il est élu.

Sinon, on élimine le candidat qui a recueilli le moins de voix (on barre son nom dans les bulletins, modifiant ainsi le rang des candidats placés après le candidat éliminé).



2. Le scrutin majoritaire

- Exemple :

% des électeurs		42 %	26 %	15 %	17 %
Ordres de préférence	1^{er}	A	B	C	D
	2^e	B	C	D	C
	3^e	C	D	B	B
	4^e	D	A	A	A

% des électeurs		42 %	26 %	15 %	17 %
Ordres de préférence	1 ^{er}	A	B	C	D
	2 ^e	B	C	D	C
	3 ^e	C	D	B	B
	4 ^e	D	A	A	A

C éliminé



% des électeurs		42 %	26 %	15 %	17 %
Ordres de préférence	1 ^{er}	A	B	D	D
	2 ^e	B	D	B	B
	3 ^e	D	A	A	A

B éliminé



% des électeurs		42 %	26 %	15 %	17 %
Ordres de préférence	1 ^{er}	A	D	D	D
	2 ^e	D	A	A	A

D l'emporte avec 58% des voix

2. Le scrutin majoritaire

- Ce mode de scrutin permet à l'électeur de mieux exprimer ses opinions que le scrutin majoritaire uninominal.
- Mode de scrutin utilisé par exemple :
 - pour l'élection présidentielle en Irlande
 - pour l'élection de la chambre des représentants en Australie
 - pour les élections municipales à San Francisco.
- Rejeté en 2011 au Royaume-Uni à la suite d'un référendum.

2. Le scrutin majoritaire

2.3 La méthode Borda

- Jean-Charles, chevalier de Borda (1733-1799)
Ingénieur, membre de l'Académie des sciences.
- Nicolas, marquis de Condorcet (1743-1794)
Mathématicien et homme politique.
- Travaux pionniers sur les modes scrutins. Ils identifient les défaillances du scrutin majoritaire

2. Le scrutin majoritaire

- Exemple de Borda (1780) :

% des électeurs		5 %	34 %	32 %	29 %
Ordres de préférence	1^{er}	A	A	B	C
	2^e	B	C	C	B
	3^e	C	B	A	A

scrutin majoritaire à un tour : **A** (39%), **B** (32%), **C** (29%)

scrutin majoritaire à 2 tours : **B** (32% + 29% = 61%) bat **A** (39%)

Or la majorité préfère :

C à **B** (34% + 29% = 63%)

C à **A** (32% + 29% = 61%)

2. Le scrutin majoritaire

- **Paradoxe d'Arrow** : avec au moins trois candidats, B peut être élu, mais avec les mêmes préférences, C bat B si un perdant A n'est pas en lice.
- Le classement et/ou gagnant dépend de la présence ou l'absence de candidats mineurs.

Exemple : élection présidentielle aux États-Unis en 2000

	Floride		Etats-Unis	
	Votes	Grands électeurs	Votes	Grands électeurs
G. Bush	2 912 790	25	50 456 002	271
A. Gore	2 912 253	0	50 999 897	266
R. Nader	97 488	0	2 882 955	0

2. Le scrutin majoritaire

- La méthode Borda : système de vote pondéré

% des électeurs		5 %	34 %	32 %	29 %
Ordres de préférence	1^{er}	A	A	B	C
	2^e	B	C	C	B
	3^e	C	B	A	A

candidat A : $5 \times 3 + 34 \times 3 + 32 \times 1 + 29 \times 1 = 178$

candidat B : $5 \times 2 + 34 \times 1 + 32 \times 3 + 29 \times 2 = 198$

candidat C : $5 \times 1 + 34 \times 2 + 32 \times 2 + 29 \times 3 = 224$

2. Le scrutin majoritaire

2.4 La méthode de Condorcet

- Marquis de Condorcet : « *Que chaque électeur prononça son vœu complet par un jugement comparatif entre tous les candidats pris deux à deux.* »

Système de **comparaisons par paires** et règle majoritaire

- Vainqueur de Condorcet : *si, parmi les candidats à une élection, il en existe un qui, face à n'importe quel autre, lui est préféré par une majorité d'électeurs, alors ce candidat est appelé le **vainqueur de Condorcet**.*

2. Le scrutin majoritaire

- Exemple : préférences de 60 votants entre 3 candidats

Nbre électeurs		23	19	16	2
Ordres de préférence	1 ^{er}	A	B	C	C
	2 ^e	C	C	B	A
	3 ^e	B	A	A	B

pour 35 votants : $B > A$, pour 25 : $A > B$

pour 41 votants : $C > B$, pour 19 : $B > C$

pour 37 votants : $C > A$, pour 23 : $A > C$

=> préférence majoritaire : $C > B > A$

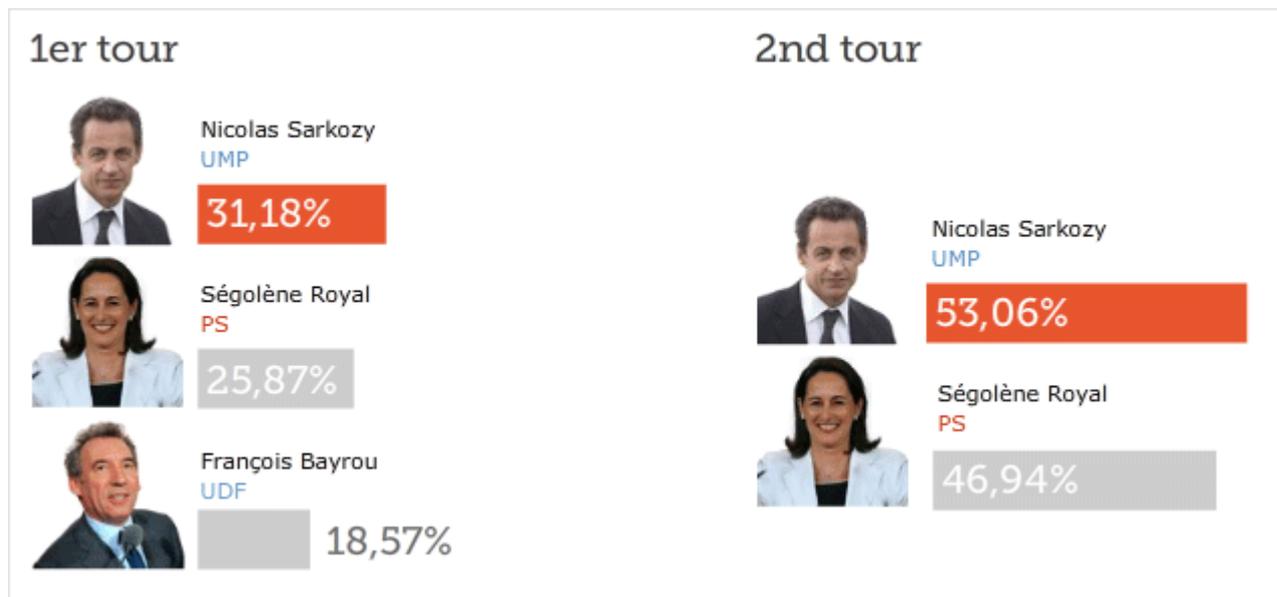
C est le vainqueur de Condorcet

2. Le scrutin majoritaire

- **Critère de Condorcet** : *un mode de scrutin satisfait le critère de Condorcet quand, lorsqu'il y a un vainqueur de Condorcet, c'est toujours lui que ce scrutin déclare vainqueur.*
- Le scrutin majoritaire à deux tours ne satisfait pas ce critère.

2. Le scrutin majoritaire

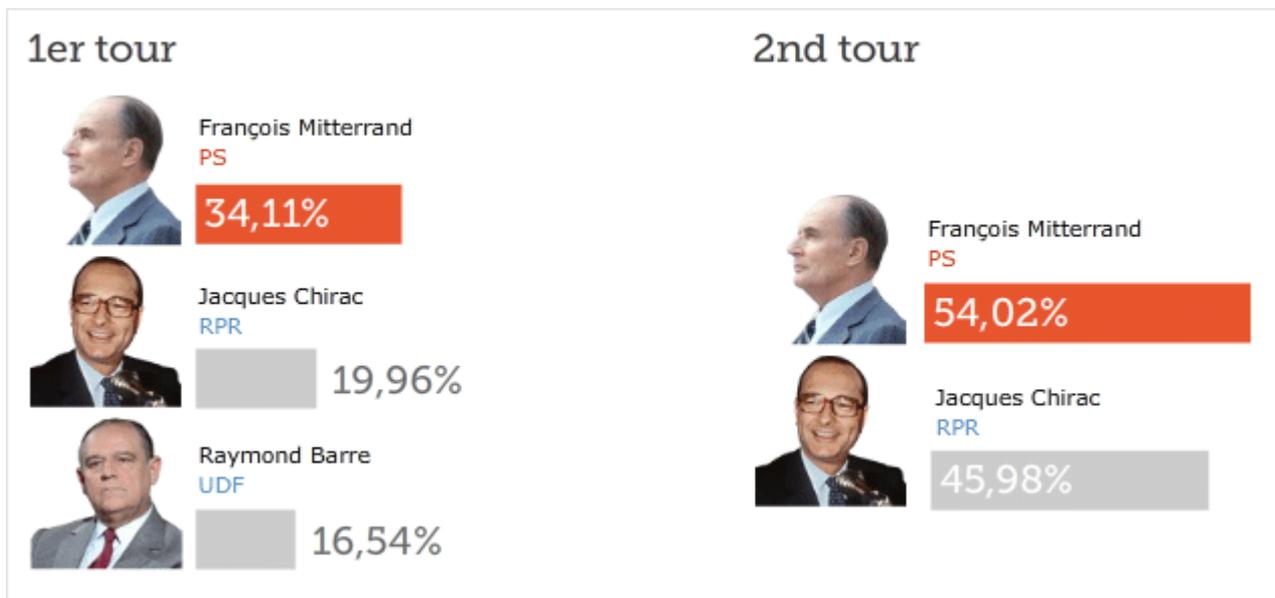
- Exemple :
Élection présidentielle 2007



2. Le scrutin majoritaire

- Exemple :

Élection présidentielle 1988



Source : <http://elections.lefigaro.fr/resultats/>

2. Le scrutin majoritaire

- **Paradoxe de Condorcet (1785)** : *dès qu'il y a au moins trois candidats, il existe des situations où il n'y a pas de vainqueur de Condorcet.*
- Exemple :

% des électeurs		5 %	34 %	32 %	29 %
Ordres de préférence	1^{er}	A	A	B	C
	2^e	B	C	A	B
	3^e	C	B	C	A

pour 71% (5% + 34% + 32%) : $A > C$

pour 63% (34% + 29%) : $C > B$

pour 61% (32% + 29%) : $B > A$

2. Le scrutin majoritaire

- Le paradoxe de Condorcet dévoile la faiblesse de certains modes de scrutins, pas de la démocratie elle-même

Elisabeth
BADINTER Robert
BADINTER

CONDORCET



Un intellectuel en politique

Fayard

2. Le scrutin majoritaire

2.5 Un exemple

- Préférences de 10 000 votants entre cinq candidats :

Nbre électeurs		3 273	2 182	1 818	1 636	727	364
Ordres de préférence	1^{er}	Albert	Emilie	Oscar	Marine	Max	Max
	2^e	Marine	Max	Emilie	Oscar	Emilie	Oscar
	3^e	Max	Marine	Max	Max	Marine	Marine
	4^e	Oscar	Oscar	Marine	Emilie	Oscar	Emilie
	5^e	Emilie	Albert	Albert	Albert	Albert	Albert

- Cinq modes de scrutins, cinq résultats différents!

2. Le scrutin majoritaire

Nbre électeurs		3 273	2 182	1 818	1 636	727	364
Ordres de préférence	1^{er}	Albert	Emilie	Oscar	Marine	Max	Max
	2^e	Marine	Max	Emilie	Oscar	Emilie	Oscar
	3^e	Max	Marine	Max	Max	Marine	Marine
	4^e	Oscar	Oscar	Marine	Emilie	Oscar	Emilie
	5^e	Emilie	Albert	Albert	Albert	Albert	Albert

- ✓ scrutin majoritaire à un tour : Albert
- ✓ scrutin majoritaire à deux tours : Emilie
- ✓ vote alternatif : Oscar
- ✓ méthode Borda : Marine
- ✓ méthode Condorcet : Max

2. Le scrutin majoritaire

2.6 Le mode de scrutin parfait n'existe pas

- Problème de fond : *transformer le plus fidèlement possible un ensemble de préférences individuelles en une préférence collective.*

Mathématiques appliquées aux sciences sociales. Théorie du choix social.

- L'agrégation d'ordres totaux (les classements individuels) ne donne pas toujours un ordre total (le classement collectif).
- **Théorèmes d'impossibilité** : *aucun mode de scrutin, basé sur les ordres de préférences, ne peut satisfaire à la fois certains critères de systèmes de vote.*

2. Le scrutin majoritaire

2.7 Une alternative : le jugement majoritaire

- Mode de scrutin développé par

Michel Balinski

Directeur de Recherche CNRS

École Polytechnique

Rida Laraki

Directeur de Recherche CNRS
(LAMSADE, Dauphine)

Professeur à l'École Polytechnique



2. Le scrutin majoritaire

- Idée : une élection ne devrait pas reposer sur les *préférences* des électeurs (comparaison des candidats) mais sur leurs *opinions* (jugement des candidats).
- Pour éviter les paradoxes du vote, il ne faut pas *comparer* les candidats, il faut les *juger*.

L'électeur doit évaluer le mérite de chacun des candidats selon une échelle (de mentions), et seules ces évaluations peuvent déterminer le classement des candidats.

« Ne votez pas, jugez ! »

2. Le scrutin majoritaire

- Le bulletin de vote dans le jugement majoritaire :

ÉLECTION PRÉSIDENTIELLE 2012

Pour présider la France, ayant pris tous les éléments
en compte, je juge en conscience que ce candidat serait :

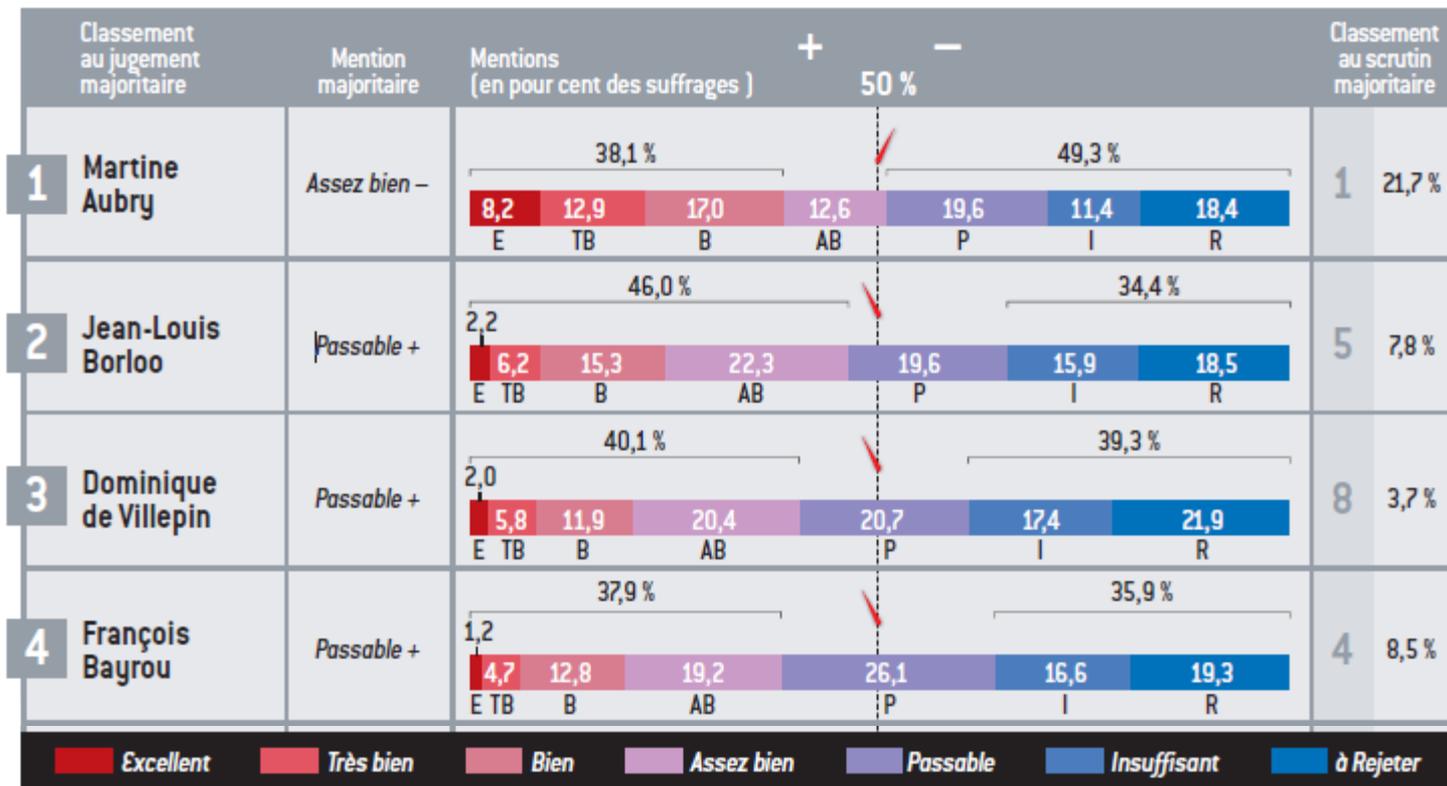
	<i>Excellent</i>	<i>Très bien</i>	<i>Bien</i>	<i>Assez bien</i>	<i>Passable</i>	<i>Insuffisant</i>	<i>à Rejeter</i>
Nathalie Arthaud							
François Bayrou							
Jacques Cheminade							
Nicolas Dupont-Aignan							
François Hollande							
Eva Joly							
Marine Le Pen							
Jean-Luc Mélenchon							
Philippe Poutou							
Nicolas Sarkozy							
Dominique de Villepin							

2. Le scrutin majoritaire

- Déroulement du vote :
 - ✓ un seul tour de scrutin
 - ✓ on détermine la **mention majoritaire** de chaque candidat : médiane des mentions
 - ✓ on détermine le **classement majoritaire** : classement des candidats suivant leurs mentions majoritaires
 - ✓ le vainqueur est celui ayant la mention majoritaire la plus élevée

2. Le scrutin majoritaire

- Exemple :



2. Le scrutin majoritaire

- Le jugement majoritaire est le mode de scrutin qui permet le mieux à l'électeur d'exprimer ses opinions ...

Rendre les élections aux électeurs : le jugement majoritaire

Terra Nova vient de publier un rapport d'Olivier Ferrand, "Réformer l'élection présidentielle, moderniser la démocratie", qui détaille l'ensemble des défaillances du cadre électoral français vieillissant.

Terra Nova | 25.04.2011 à 10h51 |

Par Michel Balinski, Rida Laraki, Terra Nova

- ... mais est-il congruent avec le régime de la Ve République ?

Conclusion

- Le scrutin majoritaire présente de nombreux défauts
 - empêche les électeurs de s'exprimer librement
 - incite à voter de façon stratégique (arbitrage entre le vote « utile » et le vote « du cœur »)
 - élimine systématiquement le centre
 - ne garantit pas l'élection du candidat jugé le meilleur par l'électorat.
- La question du meilleur mode de scrutin ne devrait pas être considérée isolément, mais en intégrant le contexte de la vie politique et le fonctionnement des institutions.

Références et sources

Publications académiques

- Balinski M., & Laraki, R. (2013). Jugement Majoritaire vs Vote Majoritaire. *Revue Française d'Economie*, 4, 11-44.
- Balinski M., & Laraki, R. (2012). Ne votez pas, jugez. *Pour la Science*, 414, 22-28.
- Balinski, M. L., & Laraki, R. (2010). *Majority judgment: Measuring, ranking, and electing*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Barthélemy, J.-P., Guénoche, A., & Hudry, O. (1989). Median linear orders: heuristics and a branch and bound algorithm. *European Journal of Operational Research*, 42, 313-325.
- Hudry, O. (2003). Votes et paradoxes : les élections ne sont pas monotones! *Mathématiques et Sciences humaines*, 163, 9-39.

Sources internet

- <https://sciencetonnante.wordpress.com/2016/10/21/reformons-lelection-presidentielle/>
- <http://www.slate.fr/france/85179/municipales-mathematiques>